Analysis 2

21.06.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 28.06.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: **3 + 3 + 4 = 10 Punkte**

Es seien $M := \{(x,y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \colon\; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ und $N := \{(x,y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \colon\; \max\{|x|,|y|\} \leq 4\}$, und sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := 4xy$.

(a) Begründen Sie, warum $f|_M$ auf M (bzw. $f|_N$ auf N) sein Maximum und Minimum annehmen muss.

(b) Begründen Sie, ob $f|_M$ lokale Minima oder Maxima im Inneren von M besitzt.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis diejenigen Stellen in N bzw. M, an denen das Maximum bzw. Minimum von $f|_N$ bzw. $f|_M$ angenommen wird.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q > 0$. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes über Lagrangemultiplikatoren, dass für alle $x_1, ..., x_n \in (0,\infty)$ mit $x_1 \cdot ... \cdot x_n = q^n$ gilt, dass

$$(1 + x_1)...(1 + x_n) \geq (1 + q)^n.$$

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $d \geq 2$ und definiere die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}(d) := \{A \in M_{d\times d}(\mathbb{R}) \colon\; \det(A) = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(d)$ eine $d^2 - 1$ dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit von $M_{d\times d}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Ist die Mannigfaltigkeit $\mathrm{SL}(d)$ als Teilmenge von $M_{d\times d}(\mathbb{R})$ mit der Hilbert-Schmidt-Norm

(i) offen?

(ii) abgeschlossen?

(iii) beschränkt?

(iv) kompakt?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4: **5 + 5 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie mittels Separation der Variablen zu folgenden Differentialgleichungen je ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Lösung $x \colon I \to \mathbb{R}$ der entsprechenden Differentialgleichung mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$:

(a) $\dot{x}(t) = e^{x(t)} \cos(t)$,

(b) $\dot{x}(t) = \frac{\sqrt{1 - x^2(t)}}{x(t)}$.

Helpdesk zur Analysis 2: Montags, 13-16 Uhr & Donnerstags, 10-13 Uhr, Raum N1.002, Endenicher Allee 60 (Nebengebäude, 1. Stock)