Analysis 2

07.06.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 14.06.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 8

Bemerkung zur Notation: Ist eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ gegeben, so sind die Argumente von u nach Vorlesung die Spaltenvektoren $(x_1, ..., x_d)^\mathsf{T}$. In diesem Sinne ist – wie auch in der Literatur üblich – $u(x_1, ..., x_d)$ als $u((x_1, ..., x_d)^\mathsf{T})$ zu verstehen, und diese Konvention werden wir auf diesem und auf den nachfolgenden Übungsblättern verwenden. Weiters verstehen wir mit der Notation $0 \in \mathbb{R}^d$, dass der Nullvektor im $\mathbb{R}^d$ betrachtet wird.

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein C^1-Diffeomorphismus und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine C^1-Abbildung, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ verschwindet. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$ die perturbierte Abbildung $f + \lambda g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 2: **7 + 3 = 10 Punkte**

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt, d.h., auf einer geeigneten Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^2$ existiert eine reellwertige Funktion u mit der Eigenschaft, dass $\{(x, y, u(x, y))^\mathsf{T}\colon\ (x, y)^\mathsf{T} \in U\}$ die Lösungsmenge der obigen Gleichung in einer geeigneten Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^3$ darstellt. Berechnen Sie weiters die partiellen Ableitungen von u an der Stelle $0 \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3: **7 + 3 = 10 Punkte**

Ist die Gleichung $x^y = y^x$ in einer Umgebung von $z = (a, b)^\mathsf{T}$ nach einer der beiden Variablen x oder y auflösbar, wobei

(a) $a = e$, $b = e$?

(b) $a = 2$, $b = 4$?

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u + \cos(uv) - vx &= 1 \\ \sin(u) - y &= v \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0)^\mathsf{T} = (0, -1, 0, 1)^\mathsf{T}$ durch differenzierbare Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ aufgelöst werden kann, und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u und v an der Stelle $(0, -1)^\mathsf{T}$.

Helpdesk zur Analysis 2: Montags, 13-16 Uhr & Donnerstags, 10-13 Uhr, Raum N1.002, Endenicher Allee 60 (Nebengebäude, 1. Stock)