Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 14. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. *Wahr oder falsch?*
Im Folgenden bezeichne n eine positive natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige oder widerlege folgende Aussagen; es genügt jeweils eine kurze Begründung.

(a) Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Dann ist τ ein Zykel.

(b) Das Produkt von zwei Zykeln in S_n ist wieder ein Zykel.

(c) Sei $\tau \in S_n$ ein k-Zykel, so gilt $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^k$.

(d) Es gibt genau $(n-1)!$ viele verschiedene n-Zykel in S_n.

Aufgabe 2. Sei n eine positive natürliche Zahl und sei S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige, dass jedes Element $\pi \in S_n$ als Produkt von höchstens $[n/2]$ vielen Zykeln geschrieben werden kann, wobei $[n/2]$ die größte natürliche Zahl $\leq n/2$ ist.
(Tipp: Induktion nach n!)

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und sei $a \in K$. Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen in $M(5 \times 5, K)$:

(a) $$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(b) $$B_a := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Betrachte die Matrix B_a aus Aufgabe 3(b).

(a) Angenommen die Charakteristik von K ist von 2 verschieden: $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Berechne in Abhängigkeit von $a \in K$ die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems $GS(B_a|0)$.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_7$ der Körper mit sieben Elementen. Betrachte weiterhin den Vektor

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 1 \\ 1+a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Lösungen hat das inhomogene Gleichungssystem $GS(B_a|b)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{F}_7$?

Aufgabe 5. Betrachte die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(a) Berechne die Determinanten von A und B.

(b) Berechne das Inverse von A.

(c) Berechne das Inverse von B.

(d) Berechne das Inverse von $C := ABA^{-1}$.

Aufgabe 6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ positive natürliche Zahlen. Seien weiterhin $A \in M(m \times m, \mathbb{R})$, $B \in M(m \times n)$ und $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben.

(a) Berechne die Determinante der Matrix

$$D := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M((m+n) \times (m+n), \mathbb{R}).$$

Folgere, dass D genau dann invertierbar ist, wenn A und C invertierbar sind.

(b) Angenommen A und C sind invertierbar. Zeige, dass

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & B' \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

für eine geeignete Matrix $B' \in M(m \times n, \mathbb{R})$ gilt.