Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 5. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Betrachte die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beschreibe anschaulich (zB. mit einer Skizze), die folgenden Abbildungen:

(a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \lambda \cdot x$, für eine reelle Zahl $0 < \lambda < 1$;

(b) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \lambda \cdot x$, für eine reelle Zahl $\lambda < -1$;

(c) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto -x$;

(d) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x + v$, für einen Vektor $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$;

(e) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (0, x_2)$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume.

(a) Zeige, dass die Summe $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$ ist.

(b) Für welche $v \in V$ ist $U_1 + v := \{u_1 + v \mid u_1 \in U_1\}$ ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definiere die Struktur eines Vektorraums auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$:

$$\mathrm{Pol}_n := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in K \text{ für alle } i = 0, \ldots, n\}.$$

(b) Für $0 \leq k \leq n$, bildet die Teilmenge der Polynome von Grad $\leq k$, d.h. die Teilmenge $\mathrm{Pol_k} \subset \mathrm{Pol_n}$, ein Untervektorraum?

(c) Für $0 \leq k \leq n$, bildet die Teilmenge der Polynome von Grad gleich k, d.h. die Menge der Polynome

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathrm{Pol}_k$$

mit $a_k \neq 0$, einen Untervektorraum?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

(a) Zeige, dass für $v \in V \setminus \{0\}$, die Abbildung $\varphi_v : K \longrightarrow V$, $a \mapsto a \cdot v$ injektiv ist.

(b) Zeige, dass für $u, v \in V \setminus \{0\}$, die Abbildungen φ_v und φ_u dasselbe Bild haben, genau dann wenn $u = b \cdot v$ für ein $b \in K$.

(c) Folgere aus Teil (a), dass K endlich ist, falls V endlich ist.

(d) Gilt die Umkehrung von Teil (c)? D.h., falls K endlich ist, folgt dann schon, dass V endlich ist?